

# 適応的システムの確率的環境内での 動作とその順応速度

The Behavior of Adaptive System in Stochastic Environment  
and its Convergence Speed

竹 内 昭 浩  
Takeuchi, Akihiro

## ABSTRACT

It is an interesting problem to investigate the interaction between stochastic environments and adaptive systems as a model of control systems or intelligent behavior. In this paper we propose the system which behaves in an adaptive under the stochastic environments and discuss the interactive behavior among them. Furthermore the convergence speed of adaptive processes is discussed.

## 1. はじめに

確率的環境内における適応的システム・適応的オートマトンの振る舞いについてはこれまでも多くの研究者により考察されてきた。<sup>(1)</sup>これは定められた能力を持つシステムが未知の環境内に置かれ相互作用を行うとき、どのように振る舞い、如何にその環境に適応していくかを明らかにしようとする試みであり、非常に興味深い考察である。

本稿で考察する確率的環境はランダム環境とも呼ばれ以下のように定義される。

[定義] ランダム環境  $C = C(p_1, p_2)$  とはその環境内で行動するシステム

(1) Tsetlin [T-3], 竹内 [T-1], 竹内 [T-2] 等

の出力  $o_i$  に対して、確率  $p_i$  でもって損失（システムの負け）を、確率  $q_i(p_i + q_i = 1)$  でもって利得（システムの勝ち）を呈する環境である。

ところで、筆者らは先に以下のようなシステム  $S_1$  を提案し、ランダム環境内における行動を考察した<sup>(2)</sup>。

1. 状態は全てで  $2n$  個とし、それぞれ  $r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1n}, r_{21}, r_{22}, \dots, r_{2n}$  とする。
2. 状態  $r_{11}$  では、確率  $(1-b)$  で戦略  $o_1$  を、確立  $b$  で戦略  $o_2$  を取る。また  $r_{21}$  では確率  $(1-b)$  で戦略  $o_2$  を、確率  $b$  で戦  $o_1$  を取る。
3. その他の状態では確率  $1/2$  で戦略  $o_1$  または  $o_2$  を取る。
4. 状態  $r_{12}$  から  $r_{1n}$  までの状態  $r_{1j}$  で  $o_1$  を選んで勝ったときには状態  $r_{11}$  に推移する。また状態  $r_{22}$  から  $r_{2n}$  までの状態  $r_{2j}$  で  $o_2$  を選んで勝ったときには状態  $r_{21}$  に推移する。
5. 状態  $r_{12}$  から  $r_{1n-1}$  までの状態  $r_{1j}$  で  $o_2$  を選んで勝ったときには状態  $r_{1j+1}$  に推移する。また状態  $r_{22}$  から  $r_{2n-1}$  までの状態  $r_{2j}$  で  $o_1$  を選んで勝ったときには状態  $r_{2j+1}$  に推移する。
6. 状態  $r_{1n}$  で  $o_2$  を選んで勝ったときには状態  $r_{2n}$  に推移する。また状態  $r_{2n}$  で  $o_1$  を選んで勝ったときには状態  $r_{1n}$  に推移する。
7. その他の場合には状態推移はない。

このシステム  $S_1$  は利得を得たときにのみ状態の推移が起こっているが、逆に損失を被った時にのみ状態推移を行うシステムも考えることができ、そのシステムを  $S_2$  と名づけ同様の解析も行った。

本稿ではこれら二つのシステムを結合したシステム  $M$  を提案し、システム  $M$  の環境  $C = C(p_1, p_2)$  内における振る舞いを考察する。さらにシステム  $M$  の環境への順応速度の問題を取り上げ、先のシステム  $S_1, S_2$  との比較検討を行う。

(2) 竹内 [T-2]

## 2. 適応的システム M

ここで  $b < 1/2$  として次のようなシステム  $M$  を考えよう。

1. 状態はすべてで  $2n$  個とし、それぞれ  $r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1n}, r_{21}, r_{22}, \dots, r_{2n}$  とする。
2. 状態  $r_{11}$  では,
  - 2-1. 確率  $b$  で戦略  $o_1$  を取り、その結果損失を受けたときは状態  $r_{12}$  へ推移し、利得を受けたときは状態推移をしない。
  - 2-2. 確率  $b$  で戦略  $o_2$  を取り、その結果利得を受けたときは状態  $r_{12}$  へ推移し、損失を受けたときは状態推移をしない。
  - 2-3. 残りの確率で戦略  $o_1$  を取り、状態推移はしない。
3. 状態  $r_{21}$  では,
  - 3-1. 確率  $b$  で戦略  $o_2$  を取り、その結果損失を受けたときは状態  $r_{22}$  へ推移し、利得を受けたときは状態推移をしない。
  - 3-2. 確率  $b$  で戦略  $o_1$  を取り、その結果利得を受けたときは状態  $r_{22}$  へ推移し、損失を受けたときは状態推移をしない。
  - 3-3. 残りの確率で戦略  $o_2$  を取り、状態推移はしない。
4. その他の状態では確率  $1/2$  で戦略  $o_1$  または  $o_2$  を取り,
  - 4-1. 状態  $r_{12}$  から  $r_{1n}$  までの状態  $r_{1j}$  で  $o_1$  を選んで利得を受けたとき、および  $o_2$  を選んで損失を受けたときは状態  $r_{11}$  に推移する。
  - 4-2. 状態  $r_{22}$  から  $r_{2n}$  までの状態  $r_{2j}$  で  $o_2$  を選んで利得を受けたとき、および  $o_1$  を選んで損失を受けたときは状態  $r_{21}$  に推移する。
  - 4-3. 状態  $r_{12}$  から  $r_{1n-1}$  までの状態  $r_{1j}$  で  $o_1$  を選んで損失を受けたとき、および  $o_2$  を選んで利得を受けたときは状態  $r_{1j+1}$  に推移する。
  - 4-4. 状態  $r_{22}$  から  $r_{2n-1}$  までの状態  $r_{2j}$  で  $o_1$  を選んで利得を受けたとき、および  $o_2$  を選んで損失を受けたときは状態  $r_{2j+1}$  に推移する。
  - 4-5. 状態  $r_{1n}$  で  $o_1$  を選んで損失を受けたとき、および  $o_2$  を選んで利得を受けたときは状態  $r_{2n}$  に推移する。

4-6. 状態  $r_{2n}$  で  $o_1$  を選んで利得を受けたとき、および  $o_2$  を選んで損失を受けたときは状態  $r_{1n}$  に推移する。

このシステム  $M$  とランダム環境  $C$  との相互作用を解析してみよう。この相互作用系が有限マルコフ過程となることは明らかである。そこで、このマルコフ過程の状態推移確率行列を  $P$  とおくと、

$P =$

$$\left( \begin{array}{cccccccc} 1-b(q_2+p_1) & b(q_2+p_1) & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{q_1+p_2}{2} & 0 & \frac{q_2+p_1}{2} & \cdots & 0 & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \cdots & 0 & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{q_1+p_2}{2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{q_2+p_1}{2} & \vdots & \cdots & 0 \\ \frac{q_1+p_2}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{q_2+p_1}{2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1-b(q_1+p_1) & b(q_2+p_1) & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \frac{q_2+p_1}{2} & 0 & \frac{q_1+p_2}{2} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{q_1+p_2}{2} & \frac{q_2+p_1}{2} & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right) \quad (1)$$

となる。またこの系はエルゴード的であるので、定常状態時におけるシステム  $M$  の状態が  $r_{ij}$  である確率を  $\pi_{ij}$  とすると、

$$\pi_{11} = (1-b(q_2+p_1))\pi_{11} + \frac{q_1+p_2}{2}(\pi_{12}+\pi_{13}+\cdots+\pi_{1n})$$

$$\pi_{12} = b(q_2+p_1)\pi_{11}$$

$$\pi_{13} = \frac{q_2+p_1}{2}\pi_{12}$$

$$\vdots$$

$$\pi_{1j} = \frac{q_2+p_1}{2}\pi_{1j-1}$$

$$\vdots$$

$$\pi_{1n} = \frac{q_2+p_1}{2}\pi_{1n-1} + \frac{q_1+p_2}{2}\pi_{2n}$$

$$\pi_{12} = (1 - b(q_1 + p_2))\pi_{21} + \frac{q_2 + p_1}{2}(\pi_{22} + \pi_{23} + \cdots + \pi_{2n}) \quad (2)$$

$$\pi_{22} = b(q_1 + p_2)\pi_{21}$$

$$\pi_{23} = \frac{q_1 + p_2}{2}\pi_{22}$$

$$\vdots$$

$$\pi_{2j} = \frac{q_1 + p_2}{2}\pi_{2j-1}$$

$$\vdots$$

$$\pi_{2n} = \frac{q_1 + p_2}{2}\pi_{2n-1} + \frac{q_2 + p_1}{2}\pi_{1n}$$

を得る。ここで、

$$R_1 = \frac{q_1 + p_2}{2} \quad R_2 = \frac{q_2 + p_1}{2}$$

とおくと、

$$\pi_{11} = \frac{R_1}{2bR_2}(\pi_{12} + \pi_{13} + \cdots + \pi_{1n})$$

$$\pi_{12} = 2bR_2\pi_{11}$$

$$\pi_{13} = R_2\pi_{12}$$

$$\vdots$$

$$\pi_{1j} = R_2\pi_{1j-1}$$

$$\vdots$$

$$\pi_{1n} = R_2\pi_{1n-1} + R_1\pi_{2n}$$

$$\pi_{12} = \frac{R_2}{2bR_1}(\pi_{22} + \pi_{23} + \cdots + \pi_{2n}) \quad (3)$$

$$\pi_{22} = 2bR_1\pi_{21}$$

$$\pi_{23} = R_1\pi_{22}$$

$$\vdots$$

$$\pi_{2j} = R_1\pi_{2j-1}$$

$$\vdots$$

$$\pi_{2n} = R_1\pi_{2n-1} + R_2\pi_{1n}$$

となる。式 (3) より

$$\pi_{1j} = R_2^{j-2}\pi_{12} \quad \pi_{2j} = R_1^{j-2}\pi_{22}$$

となり, さらに

$$\begin{aligned}\frac{2bR_2}{R_1}\pi_{11} &= (\pi_{12} + \pi_{13} + \cdots + \pi_{1n}) \\ &= \frac{1-R_2^{n-1}}{1-R_2}\pi_{12} + R_1\pi_{2n} \\ &= 2bR_2\frac{1-R_2^{n-1}}{R_1}\pi_{11} + R_1\pi_{2n}\end{aligned}$$

を得, これより

$$\pi_{2n} = \frac{2bR_2^n}{R_1^2}\pi_{11} \quad (4)$$

となる。また式 (3) の  $\pi_{21}$  と式 (4) より

$$\frac{2bR_1}{R_2}\pi_{21} = 2bR_1\frac{1-R_1^{n-2}}{R_1}\pi_{21} + \frac{2bR_2^n}{R_1^2}\pi_{11}$$

を得, これを整理すると

$$R_1^{n+1}\pi_{21} = R_2^{n+1}\pi_{11} \quad (5)$$

となる。また

$$\sum_{i,j} \pi_{ij} = 1$$

であるから,

$$\left(1 + \frac{2bR_2}{R_1}\right)\pi_{11} + \left(1 + \frac{2bR_1}{R_2}\right)\pi_{21} = 1 \quad (6)$$

となり, 式 (5) と式 (6) より  $\pi_{11}$ ,  $\pi_{21}$  を解くと,

$$\begin{aligned}\pi_{11} &= \frac{R_1^{n+1}}{R_1^n(R_1 + 2bR_2) + R_2^n(R_2 + 2bR_1)} \\ \pi_{21} &= \frac{R_2^{n+1}}{R_1^n(R_1 + 2bR_2) + R_2^n(R_2 + 2bR_1)}\end{aligned} \quad (7)$$

となる。また

$$\begin{aligned}\pi_{12} + \pi_{13} + \cdots + \pi_{1n} + \pi_{22} + \pi_{23} + \cdots + \pi_{2n} \\ &= \frac{2bR_2}{R_1}\pi_{11} + \frac{2bR_1}{R_2}\pi_{21} \\ &= \frac{2b(R_2R_1^n + R_1R_2^n)}{R_1^n(R_1 + 2bR_2) + R_2^n(R_2 + 2bR_1)}\end{aligned} \quad (8)$$

となる。状態  $r_{11}$  では確率  $(1-b)$  で戦略  $o_1$  を確率  $b$  で  $o_2$  を取り, 状態  $r_{21}$  では確

率  $(1-b)$  で戦略  $o_2$  を確率  $b$  で  $o_1$  を取り, その他の状態では確率  $1/2$  で戦略  $o_1$  または  $o_2$  を取るので, この相互作用系の定常状態時におけるシステム  $M$  の損失の期待値を  $\sigma(M;C)$  とおくと,

$$\begin{aligned}
 \sigma(M;C) &= ((1-b)p_1 + bp_2)\pi_{11} + ((1-b)p_2 + bp_1)\pi_{21} \\
 &\quad + \frac{(p_1 + p_2)}{2}(\pi_{12} + \pi_{13} + \cdots + \pi_{1n} + \pi_{22} + \pi_{23} + \cdots + \pi_{2n}) \\
 &= \frac{((1-b)p_1 + bp_2)R_1^{n+1} + ((1-b)p_2 + bp_1)R_2^{n+1}}{R_1^n(R_1 + 2bR_2) + R_2^n(R_2 + 2bR_1)} \\
 &\quad + \frac{b(p_1 + p_2)(R_2R_1^n + R_1R_2^n)}{R_1^n(R_1 + 2bR_2) + R_2^n(R_2 + 2bR_1)} \\
 &= \frac{X_{12} + X_{21}}{R_1^n(R_1 + 2bR_2) + R_2^n(R_2 + 2bR_1)} \tag{9}
 \end{aligned}$$

ただし

$$X_{ij} = R_i^n((1-b)p_iR_i + bp_jR_i + bR_j(p_i + p_j))$$

となる。この  $\sigma(M;C)$  は明らかに  $b$  に対しては単調増加,  $n$  に対しては単調減少となっており,  $b$  を十分小さくし, また  $n$  を十分大きくした場合その値が

$$\min\{C(p_1, p_2)\}$$

に限りなく近づいていくこと, つまりその条件下でシステム  $M$  がランダム環境に対して適応的であることが分かる。

ここで, 先に説明したシステム  $S_1, S_2$  の損失の期待値とシステム  $M$  のそれとを比較してみよう。

システム  $S_1$  が環境  $C$  内で十分長い時間相互作用した後の損失の期待値を  $\sigma(S_1;C)$  と置くと, システム  $M$  の場合と同様の計算により,

$$\begin{aligned}
 \sigma(S_1;C) &= \frac{Y_{12} + Y_{21}}{Q_1^n(Q_1 + 2bQ_2) + Q_2^n(Q_2 + 2bQ_1)} \tag{10}
 \end{aligned}$$

ただし

$$Y_{ij} = Q_i^n((1-b)p_iQ_i + bp_jQ_i + bQ_j(p_i + p_j))$$

$$Q_1 = \frac{q_1}{q_1 + q_2} \quad Q_2 = \frac{q_2}{q_1 + q_2}$$

となる。そしてこの値は状態数  $n$  を十分大きくし、また  $b$  を十分小さくしたとき、その値が

$$\min \{C(p_1, p_2)\}$$

に限りなく近づいていくこと、つまりシステム  $S_1$  が環境  $C$  に対して適応的であることが分かる。

同様に、 $S_2$  が環境  $C$  内で十分長い時間相互作用した後の損失の期待値  $\sigma(S_2; C)$  は

$$\begin{aligned} \sigma(S_2; C) &= \frac{Z_{12} + Z_{21}}{P_1^n(P_1 + 2bP_2) + P_2^n(P_2 + 2bP_1)} \end{aligned} \quad (11)$$

ただし

$$Z_{ij} = P_i^n((1-b)p_iP_i + bp_jP_i + bP_j(p_i + p_j))$$

$$P_1 = \frac{p_2}{p_1 + p_2} \quad P_2 = \frac{p_1}{p_1 + p_2}$$

となり、システム  $S_2$  もまた  $n$  を十分大きくし、 $b$  を十分小さくしたとき環境  $C$  に対して適応的であることが分かる。

システム  $M$  とシステム  $S_1$ ,  $S_2$  の損失の期待値の比較を行なうため、 $C = C(0.6, 0.8)$  および  $C = C(0.2, 0.4)$  という二つのランダム環境における損失の期待値を  $b = 0.01$  として状態数の変化に対してプロットしたのが図 1, 2 である。

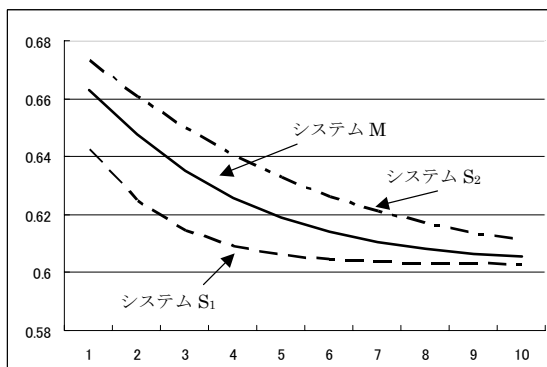


図 1



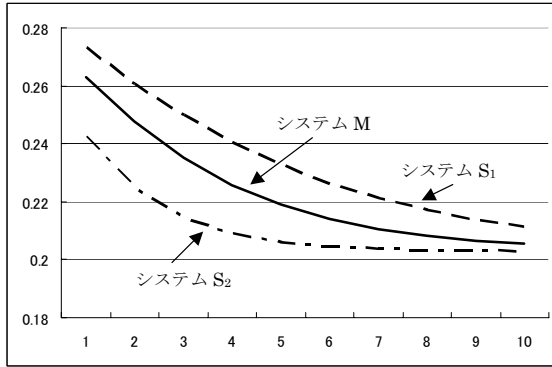


図 2

また,  $p_1 + p_2 = 1$  のとき

$$Q_i = P_i = R_i = q_i$$

となり,

$$\sigma(S_1; C) = \sigma(S_2; C) = \sigma(M; C) \quad (12)$$

が成り立つ。このことと式 (8), (9), (10) さらに図 1, 2 の比較から  $p_1 + p_2 > 1$  のときには

$$\sigma(S_1; C) < \sigma(M; C) < \sigma(S_2; C) \quad (13)$$

となり,  $p_1 + p_2 < 1$  のときには

$$\sigma(S_1; C) > \sigma(M; C) > \sigma(S_2; C) \quad (14)$$

となり, いずれの場合にもシステム  $M$  は  $S_1$ ,  $S_2$  の中間的な適応性を示しており, より広い範囲での平均的な適応能力を持っていることが確かめられる。

### 3. 環境順応速度に関する考察

前節では適応的能力に関してはシステム  $M$  が  $S_1$  と  $S_2$  との中間的な能力を持っており, より広範な適応能力を持っていることが明らかになった。本節では, さらにこれらのシステムの環境に対する順応速度について考察を行う。この順応速度に関する考察を行う為には, 適応的システムが環境内で有限回動作した後

の状態を計算する必要がある。そのため、ここでは母関数を用いることにする。<sup>(3)</sup>

幾何級数よりも早く増大しない関数  $f(m)$  を仮定する。このとき、 $f(m)$  に対し、次の関数  $F(z)$  が一意的に定まる。これを  $f(m)$  の母関数という。

$$F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f(m)z^m \quad (15)$$

ベクトル、行列の母関数は、その各要素の母関数を要素とするベクトル、行列と考えることができる。ここで時刻  $t$  における状態確率ベクトルを  $\pi(t)$  とし、状態推移行列を  $P$  と表すと、

$$\pi(t+1) = \pi(t)P \quad (16)$$

である。 $f(m+1)$  の母関数は  $(F(z) - f(0))/z$  であるから、上式より、

$$(\Pi(z) - \pi(0))/z = \Pi(z)P \quad (17)$$

ただし  $\Pi(z)$  は  $\pi(t)$  の母関数  
すると、

$$\Pi(z)(I - zP) = \pi(0) \quad (18)$$

ただし  $I$  は単位行列  
より、

$$\Pi(z) = \pi(0)(I - zP)^{-1} \quad (19)$$

を得る。 $(I - zP)^{-1}$  の逆変換した式を  $H(t)$  とおいて式 (18) を逆変換すると

$$\pi(t) = \pi(0)H(t) \quad (20)$$

となる。また

$$\pi(t) = \pi(0)P^t \quad (21)$$

より

$$H(t) = P^t \quad (22)$$

となる。さらにこのマルコフ過程がエルゴード的である場合には

$$|I - zP| = 0$$

の根のうちの1根  $z_0$  は必ず  $z_0 = 1$  となり、他の根  $z_i (i = 1, 2, \dots, n)$  の絶対値  $|z_i|$  は  $|z_i| > 1$  となる<sup>(4)</sup>ことが知られている。ここで各  $z_i$  の絶対値の逆数を  $\alpha_i$

(3) Howard [H-1], 柳井 [Y-1] 等

とおく。

$$\alpha_i = 1/|z_i| \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (23)$$

ところで、 $(I - zP)^{-1}$  を部分分数に分解すると、

$$(I - zP)^{-1} = \frac{1}{1-z}S_0 + \frac{1}{z_1-z}S_1 + \frac{1}{z_2-z}S_2 + \dots + \frac{1}{z_n-z}S_n \quad (24)$$

となるが、これを逆変換すると

$$H(t) = P^t = S_0 + T(t) \quad (25)$$

と書ける。ここに  $T(t)$  は  $t$  が十分大きくなったとき漸近的に 0 に近づいてゆく。

そのときの振る舞いは  $|z_i|$  の値、つまり  $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, n)$  に依存するが、中でも  $\alpha_1 = \max_i \{\alpha_i\}$  に大きく依存し、この値が小さければ小さいほどそのマルコフ過程の収束速度が速くなると考えて差し支えない。<sup>(5)</sup>

この関係を利用して適応的システムの順応速度の考察を行おう。ただし一般的な場合の解析は非常に煩雑となるので、各システムの特徴が現れる中で最も状態数の少ない  $n = 2$  の場合の数値解析により順応速度に関する議論を行う。

まずランダム環境  $C = C(0.3, 0.8)$  とし、 $b = 0.01$  とした場合のシステム  $M$  の動作を考える。

このとき推移行列  $P$  は、

$$P = \begin{pmatrix} 1-b(q_2+p_1) & b(q_2+p_1) & 0 & 0 \\ \frac{q_1+p_2}{2} & 0 & 0 & \frac{q_2+p_1}{2} \\ 0 & 0 & 1-b(q_1+p_2) & b(q_1+p_2) \\ 0 & \frac{q_1+p_2}{2} & \frac{q_2+p_1}{2} & 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0.995 & 0.005 & 0 & 0 \\ 0.75 & 0 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0.985 & 0.015 \\ 0 & 0.75 & 0.25 & 0 \end{pmatrix} \quad (26)$$

✓ (4) Feller [F-1]

(5) Feller [F-1]

となり,

$$(I - zP) = \begin{pmatrix} 1-0.995z & -0.005z & 0 & 0 \\ -0.75z & 1 & 0 & -0.25z \\ 0 & 0 & 1-0.985z & -0.015z \\ 0 & -0.75z & -0.25z & 1 \end{pmatrix} \quad (27)$$

を得る。

ここで  $|I - zP| = 0$  の根を求めると,

$$z_0 = 1, z_1 = 1.01083, z_2 = -2.29546, z_3 = 2.34544$$

となり, 結局  $\alpha_1$  の値を小数点以下第 6 位まで求めると

$$\alpha_1 = 0.989286$$

<sup>(6)</sup>  
を得る。

同様にして同じ環境  $C = C(0.3, 0.8)$  に対して,  $b = 0.01$  とした場合のシステム  $S_1$  を考えると

$$P = \begin{pmatrix} 1-bq_2 & bq_2 & 0 & 0 \\ \frac{q_1}{2} & \frac{p_1+p_2}{2} & 0 & \frac{q_2}{2} \\ 0 & 0 & 1-bq_1 & bq_1 \\ 0 & \frac{q_1}{2} & \frac{q_2}{2} & \frac{p_1+p_2}{2} \end{pmatrix} \quad (28)$$

$$= \begin{pmatrix} 0.998 & 0.002 & 0 & 0 \\ 0.35 & 0.55 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.993 & 0.007 \\ 0 & 0.35 & 0.1 & 0.55 \end{pmatrix}$$

となり,

$|I - zP| = 0$  の根は

(6) これらの計算には MATHEMATICA を用いた。

$$z_0 = 1, z_1 = 1.00556, z_2 = 1.44719, z_3 = 4.91319$$

となり,  $\alpha_1$  の値として

$$\alpha_1 = 0.994471$$

を得る。

またシステム  $S_2$  に関しては,

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \begin{pmatrix} 1-bp_1 & bp_1 & 0 & 0 \\ \frac{p_2}{2} & \frac{q_1+q_2}{2} & 0 & \frac{p_1}{2} \\ 0 & 0 & 1-bp_2 & bp_2 \\ 0 & \frac{p_2}{2} & \frac{p_1}{2} & \frac{q_1+q_2}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.997 & 0.003 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.45 & 0 & 0.15 \\ 0 & 0 & 0.992 & 0.008 \\ 0 & 0.4 & 0.15 & 0.45 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (29)$$

となり,

$|\mathbf{I} - z\mathbf{P}| = 0$  の根が

$$z_0 = 1, z_1 = 1.00556, z_2 = 1.44719, z_3 = 4.91319$$

となり,  $\alpha_1$  の値は

$$\alpha_1 = 0.994471$$

となる。

ここに各システムの  $\alpha_1$  の値を比べると, システム  $M$  のそれが一番小さいこと, つまり順応速度が一番速いことがわかる。

以下同様にして  $b = 0.01$  として, 様々な環境  $C = C(p_1, p_2)$  に関してシステム  $M, S_1, S_2$  に対する  $\alpha_1$  の値を求めたものが表 1 である。

$p_1$	$p_2$	システム M の $\alpha_1$	システム $S_1$ の $\alpha_1$	システム $S_2$ の $\alpha_1$
0.1	0.2	0.993177	0.994293	0.998722
0.1	0.4	0.991818	0.994491	0.99692
0.1	0.6	0.989286	0.994065	0.994965
0.1	0.8	0.985892	0.992871	0.992989
0.2	0.3	0.993177	0.994956	0.998163
0.2	0.5	0.991818	0.995084	0.996612
0.2	0.7	0.989286	0.994471	0.994787
0.2	0.9	0.985892	0.992989	0.992871
0.3	0.4	0.993177	0.995609	0.997546
0.3	0.6	0.991818	0.995639	0.996165
0.3	0.8	0.989286	0.994787	0.994471
0.4	0.5	0.993177	0.996264	0.99691
0.4	0.7	0.991818	0.996165	0.995639
0.4	0.9	0.989286	0.994965	0.994065
0.5	0.6	0.993177	0.99691	0.996264
0.5	0.8	0.991818	0.996612	0.995084
0.6	0.7	0.993177	0.997546	0.995609
0.6	0.9	0.991818	0.99692	0.994491
0.7	0.8	0.993177	0.998163	0.994956
0.8	0.9	0.993177	0.998722	0.994293

表 1

この表からも明らかなようにいずれの環境においてもシステム  $M$  の  $\alpha_1$  がシステム  $S_1$ ,  $S_2$  いずれの  $\alpha_1$  よりも小さいこと、つまり環境  $C = C(p_1, p_2)$  への順応速度が速いことが読み取れる。

まったく同様の考察により、状態数を  $n = 3$  とし、また  $b = 0.1$  として様々な環境  $C = C(p_1, p_2)$  に関してシステム  $M$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  に対する  $\alpha_1$  の値を求めたものが表 2 である。

$p_1$	$p_2$	システム $M$ の $\alpha_1$	システム $S_1$ の $\alpha_1$	システム $S_2$ の $\alpha_1$
0.1	0.2	0.967623	0.973331	0.992802
0.1	0.4	0.955311	0.972271	0.9781
0.1	0.6	0.930137	0.965083	0.960624
0.1	0.8	0.890892	0.947759	0.942125
0.2	0.3	0.967623	0.976353	0.990756
0.2	0.5	0.955311	0.97464	0.979231
0.2	0.7	0.930137	0.965372	0.964329
0.2	0.9	0.890892	0.942125	0.947759
0.3	0.4	0.967623	0.979365	0.988113
0.3	0.6	0.955311	0.976753	0.978416
0.3	0.8	0.930137	0.964329	0.965372
0.4	0.5	0.967623	0.982338	0.98527
0.4	0.7	0.955311	0.978416	0.976753
0.4	0.9	0.930137	0.960624	0.970704
0.5	0.6	0.967623	0.98527	0.982338
0.5	0.8	0.955311	0.979231	0.97464
0.6	0.7	0.967623	0.988113	0.979365
0.6	0.9	0.955311	0.9781	0.972271
0.7	0.8	0.967623	0.990756	0.976353
0.8	0.9	0.967623	0.992802	0.973331

表 2

先ほどと同様に、いずれの環境においてもシステム  $M$  の  $\alpha_1$  がシステム  $S_1$ ,  $S_2$  いずれの  $\alpha_1$  よりも小さいこと、つまり環境  $C = C(p_1, p_2)$  への順応速度が速いことが読み取れる。

#### 4. まとめ

本稿では先に提案した適応的システム  $S_1$ ,  $S_2$  を結合したシステム  $M$  を設計し、

このシステムの適応能力が先の二つのシステムの中間的な能力を持ち、より広範囲な適応性を持つことを示した。さらにその順応速度についても言及し、システム  $M$  がこの点でも優れた能力を持つことを示した。

ところで、複数の自立的システムが集まり、周りの環境に適応しながら行動するような系のモデルとして、システム間のゲーム、特に  $n$  人ゲームの世界の考察や、さらにこれらと学習、進化などとの関連については非常に興味ある問題である。それらについてはまた稿を改めて議論したいと思っている。

### 参考文献

- [F-1] Feller, W. : An Introduction to Probability Theory and its Applications, John Wiley & Sons 1957 ; 河田龍夫監訳 : 確率論とその応用, 上, 下 紀伊国屋 1961
- [H-1] Howard, R.A. : Dynamic Programming and Markov Processes, M.I.T. Press 1960 ; 関根智明他訳 : ダイナミックプログラミングとマルコフ過程 培風館 1971
- [T-1] 竹内昭浩 : 人間行動とオートマトン 白桃書房 1984
- [T-2] 竹内昭浩 : 「確率的環境内における適応的システムの動作」 経済理, 295, pp.45-62 1994
- [T-3] Tsetlin, M.L. : “On the behavior of finite automata in random media”, Automation and Remote Control, 22, pp.1345-1354 1961
- [Y-1] 柳井浩 :  $z$  変換とその応用 日科技連 1988